Jochen Weber

Anwendungsaufgaben zu den ganzrationalen Funktionen

1.0 Die Produktionskosten für ein Produkt ergeben sich nach der Kostenfunktion $K(x)=4000x+32000$.
Bei einem Angebot von x Stück kann ein Stückpreis von $p(x)=-4000x+40000$ erzielt werden.

1.1 Bestimmen Sie die Definitionsmenge von p.

1.2 Ermitteln Sie den Funktionsterm der Erlösfunktion E(x) und berechnen Sie den maximalen Erlös.

1.3 Zeichnen Sie die Graphen der Kostenfunktion K(x), der Preisabsatzfunktion p(x) und der Erlösfunktion E(x) in ein Koordinatensystem ein.

1.4 Berechnen Sie die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze.

1.5 Bestimmen Sie den maximalen Gewinn.

2.0 Gegeben sind die Kostenfunktion $K(x)=x^3-6x^2+15x+32$ und die Preisabsatzfunktion $p(x)=-7x+49$.

2.1 Bestimmen Sie die Definitionsmenge von p(x).

2.2 Ermitteln Sie den Funktionsterm der Erlösfunktion E(x).

2.3 Berechnen Sie die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze.

3.0 Ein Vertreter erhält ein festes Gehalt von 1400 € im Monat und zusätzlich 7,5 % des erzielten Monatsumsatzes.

3.1 Geben Sie eine Gleichung der Funktion an, die die Abhängigkeit des monatlichen Einkommens vom erzielten Umsatz beschreibt.

3.2 Berechnen Sie, welches Monatseinkommen der Vertreter bei einem Umsatz von 28000 € erreicht.

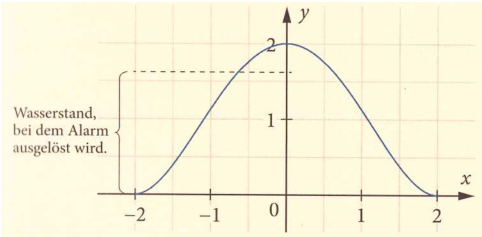
3.3 Bestimmen Sie, welchen Umsatz der Vertreter haben muss, um ein monatliches Einkommen von 5000 € zu erzielen.

4.0 Wegen einer Reparatur muss ein Öltank leer gepumpt werden. Nach zehn Minuten befinden sich noch 4800 l, nach weiteren fünf Minuten noch 4200 l im Tank. Die Pumpe arbeitet gleichmäßig.

4.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Funktion, die den Tankinhalt in Abhängigkeit der Pumpzeit beschreibt.

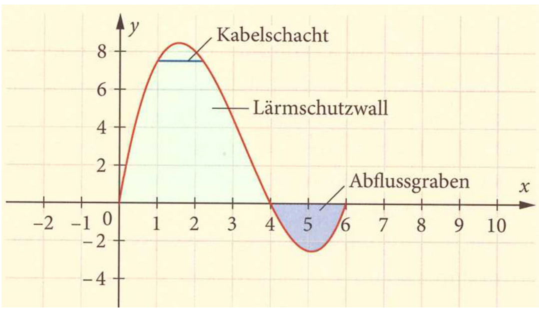
4.2 Berechnen Sie, nach wie vielen Minuten der Tank leer gepumpt ist.

5 Zum Schutz vor Überflutungen soll eine geradlinig verlaufende Deichanlage von 4 Meter Breite und 2 Meter Höhe errichtet werden. Der Querschnitt des Deichs verläuft entlang des Graphen der Funktion f mit der Gleichung $f(x)=\frac{1}{8}x^4-x^2+2$ mit dem eingeschränkten Definitionsbereich $D_f=\left[-2;2\right]$ (siehe Skizze).



Alarm wird bei einem Wasserstand von 1,62 Meter über der x-Achse ausgelöst. Ermitteln Sie für einen Wasserstand von 1,62 die x-Koordinate des Punktes, an der die Wasseroberfläche an den Deich trifft.
Lesen Sie die Koordinaten der beiden Wendepunkte sowie des Hochpunktes des Graphen der Funktion f ab.

6.0 Ein Bauunternehmen baut an Autobahnen Lärmschutzwälle. Diese schützen die angrenzenden Wohngebiete vor Fahrgeräuschen. Ein Lärmschutzwall besteht aus dem eigentlichen Wall und einem sich anschließenden Abflussgraben. Das Profil eines solchen Lärmschutzwalls ist im Intervall $0 \le x \le 6$ gemäß der Funktionsgleichung $f(x)=\frac{1}{2}x^3-5x^2+12x$ geformt. Die x-Achse stellt das waagrechte Gelände dar.
Beide Achsen sind in Meter eingeteilt.



6.1 Berechnen Sie sowohl die Breite des Lärmschutzwalls als auch die Breite des Abflussgrabens.

6.2 Durch den Lärmschutzwall soll in 7,5 m Höhe ein Kabelschacht gezogen werden. Berechnen Sie die Länge des Schachtes.

7.0 Bei einem (oben offenen) Aquarium mit quadratischer Grundfläche ist die Höhe 1,5-fach so groß wie die Seitenkante der Grundfläche.

7.1 Geben Sie eine Formel an, die das Volumen des Aquariums in Abhängigkeit von der Länge der Grundkante angibt.
Bestimmen Sie das Volumen bei einer 10 dm langen Grundkante.

7.2 Geben Sie eine Formel an, die die Oberfläche des Aquariums in Abhängigkeit von der Länge der Grundkante angibt.
Bestimmen Sie die Oberfläche bei einer 10 dm langen Grundkante.

7.3 Der Materialpreis für das Aquarium beträgt drei Euro pro dm^3. Füllt man das Aquarium, so sollte pro Liter Wasser ein Spezialsalz hinzugefügt werden, das ein Euro pro Liter kostet.
Weisen Sie nach, dass sich die Kosten durch die Gleichung $1{,}5a^3 = 21a^2$ vergleichen lassen und bestimmen Sie rechnerisch die Seitenlänge a, ab der die Kosten für den Inhalt die Kosten für das Material übersteigen.

8.0 Ein Auto bewegt sich entsprechend der Funktion f mit $f(t) = -0{,}05t^3 + 0{,}75t^2$.
Dabei steht t für die Zeit in Minuten und f(t) für den zurückgelegten Weg in Kilometern.

8.1 Zeichen Sie den Graphen im Intervall [0;10].

8.2 Beschreiben Sie den innerhalb von 10 Minuten zurückgelegten Weg des Fahrzeugs.

8.3 Ermitteln Sie, welche Wegstrecke das Auto nach 7 Minuten zurückgelegt hat.

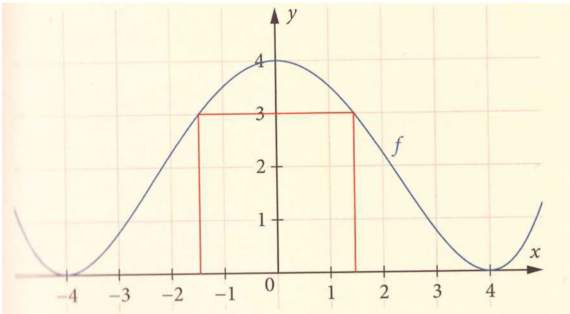
8.4 Lesen Sie aus der Zeichnung ab, nach wie vielen Minuten das Auto 12,5 Kilometer zurückgelegt hat.

8.5 Beschreiben Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f und deuten Sie es im Hinblick auf die Autofahrt.

8.6 Erörtern Sie das Fahrverhalten des Wagens nach 10 Minuten.

8.7 Erklären Sie, warum eine Erweiterung der Definitionsmenge über 10 Minuten hinaus nicht sinnvoll ist.

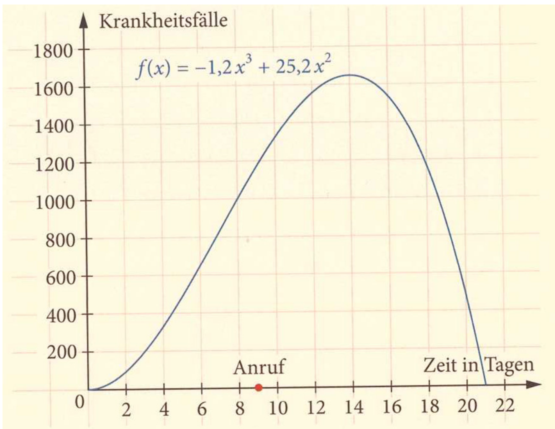
9.0 Die Abbildung zeigt den oberen Teil des Giebels eines Barock-Hauses (Maße in m). Der Rand des Giebels wird durch eine ganzrationale Funktion f vierten Grades beschrieben.



9.1 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f.

9.2 Ein Fenster der Höhe 3,0 m soll in den Giebel eingepasst werden. Berechnen Sie exakt die maximal mögliche Breite des Fensters.

10.0 Die Mathematiklehrer der elften Klasse planen für die gemeinsame Schulaufgabe für zehn Klassen eine Anwendungsaufgabe mit aktuellem Bezug. Da in der Stadt eine Grippewelle grassiert, erstellen Sie nach einem Anruf beim Gesundheitsamt untenstehende Grafik für den Verlauf der Krankheitswelle. Aus dieser können wir ablesen, wie viele neue Krankheitsfälle an einem Tag auftreten.



10.1 Berechnen Sie die voraussichtliche Anzahl der Neuerkrankungen am Termin der Faschingsparty der SMV, nämlich 10 Tage nach dem Anruf.

10.2 Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Grippewelle abgeklungen ist.

10.3 Lesen Sie aus der Grafik ab, wann die Zahl der Neuerkrankungen ihren Höchststand erreicht hat und wann die Zahl der Neuerkrankungen am stärksten ansteigt.

10.4 Was würden Sie der SMV für die Terminierung der Faschingsparty raten ?

11.0 Für die von einem Windrad erzeugte elektrische Leistung P gilt $P = c \cdot A \cdot v^3$.
Dabei ist v die Windgeschwindigkeit, A der Inhalt der vom Rotor überstrichenen Kreisfläche und c eine vom speziellen Windrad abhängige Konstante.

11.1 Bestimmen Sie, wie sich die Leistung verhält, wenn sich die Windgeschwindigkeit verdoppelt.

11.2 Lösen Sie die Formel $P = c \cdot A \cdot v^3$ nach v auf.

12.0 In einer Petrischale wird eine Bakterienkultur beobachtet, die sich zunächst vermehrt und nach einigen Stunden aufgrund eines äußeren Einflusses abstirbt. Die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(t) = -0{,}06t^3 + 0{,}6t^2 + 0{,}8t + 2$ beschreibt näherungsweise das Wachstum dieser Bakterienkultur. f(t) gibt hierbei die zum Zeitpunkt t (in Stunden) bedeckte Fläche in cm^2 an.

12.1 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall [0;12].

12.2 Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem die bedeckte Fläche genauso groß wie zu Beobachtungsbeginn ist.

12.3 Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt die Bakterienkultur ausstirbt.

12.4 Bestimmen Sie den Zeitpunkt, ab dem die Bakterienkultur nicht weiter wächst.
Geben Sie die zu diesem Zeitpunkt bedeckte Fläche an.

12.5 Untersuchen Sie, zu welchem Zeitpunkt sich die Bakterien am schnellsten vermehren.

13.0 Ein Unternehmen stellt Bauteile her. Die Produktionskosten K (in €) je Tag werden durch den Funktionsterm $K(x) = 0{,}0004x^3 - 0{,}06x^2 + 3x + 100$ in Abhängigkeit der hergestellten Stückzahl x beschrieben. Der Erlös E_p (in €) mit dem Funktionsterm $E(x) = p \cdot x$ ergibt sich aus dem Produkt des Verkaufspreises p und der verkauften Stückzahl x. Aufgrund der hohen Nachfrage können alle hergestellten Bauteile auch täglich verkauft werden. Das Unternehmen kann wegen seiner Betriebsgröße höchstens 150 Stück pro Tag herstellen.

13.1 Geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für K und für E_p an und begründen Sie Ihre Entscheidung.

13.2 Ermitteln Sie den Wert von p so, dass für eine verkaufte Anzahl von 50 Bauteilen weder ein Gewinn noch ein Verlust erzielt wird. Das heißt, es gilt: $K(50) = E_p(50)$.
Geben Sie auch die Gleichung der Erlösfunktion E_p an.

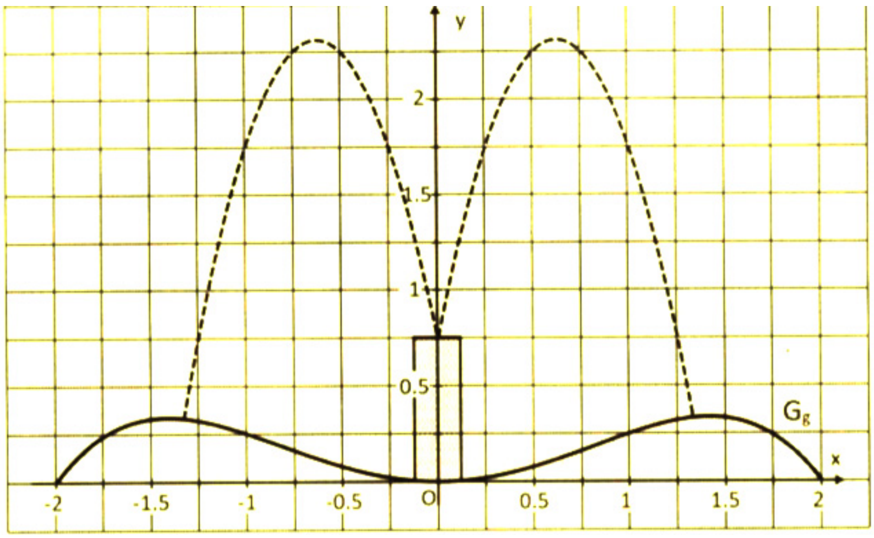
13.3 Die Gewinnfunktion G ergibt sich aus der Differenz zwischen dem Erlös und den Kosten, also $G(x) = E_3(x) - K(x)$. Berechnen Sie die Nullstellen der Gewinnfunktion G und interpretieren Sie diese im gegebenen Sachzusammenhang.

13.4 Zeichnen Sie die Graphen von E_3 und K in ein Koordinatensystem im Bereich $0 \le x \le 150$.
Maßstab: 1 cm auf der x-Achse = 10 Stück; 1 cm auf der y-Achse = 100 €)

13.5 Ermitteln Sie mithilfe der Graphen, bei welcher Produktions- und Verkaufsmenge ein maximaler Gewinn erzielt wird. Ermitteln Sie diesen Gewinn.

13.6 Berechnen Sie die Kosten je Stück bei der gewinnmaximalen Verkaufsmenge.

14.0 Die folgende Abbildung zeigt den Querschnitt eines Springbrunnens. Dieser hat eine kreisförmige Grundfläche mit einem Durchmesser von 4 m. Die Oberflächenlinie der im Querschnitt dargestellten Auffangwanne wird durch den Graphen G_g einer ganzrationalen Funktion g vierten Grades mit der Definitionsmenge $D_g = [-2;2]$ beschrieben. Der Graph G_g in einem kartesischen Koordinatensystem ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
Die Koordinaten x und y stellen Längenangaben in der Einheit Meter dar.
Bei den folgenden Rechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2020 Teil 2 AI)



14.1 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g. Entnehmen Sie dazu geeignete Werte aus der Zeichnung.

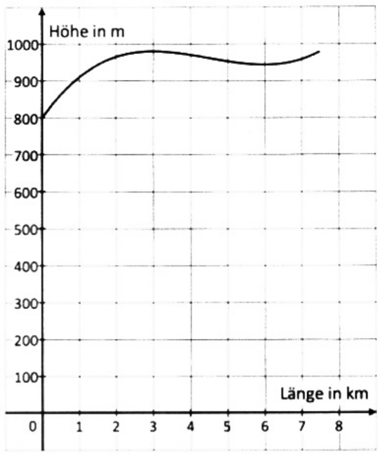
(Mögliches Teilergebnis: $g(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^2$)

14.2.0 Die Wasserfontänen treten – wie in obiger Abbildung gestrichelt dargestellt – aus einer in der Mitte befindlichen Säule aus und beschreiben Parabelbahnen. Ihr Verlauf ist abhängig vom Wasserdruck.
Im Folgenden wird nur die rechte Wasserfontäne betrachtet.
Alle möglichen Wasserstrahlen lassen sich durch die Graphen der Funktionen p_a mit $p_a(x) = -ax^2 + 5x + 0{,}75$ und $a \in \mathbb{R}^+$ darstellen.

14.2.1 Berechnen Sie, für welchen Wert von a der Strahl im Punkt $A(1|0{,}25)$ auf die Auffangwanne trifft.

14.2.2 Berechnen Sie, bis zu welcher maximalen Höhe h_{max} die Auffangwanne gefüllt werden kann, bevor sie überläuft.

15.0 Ein Teilstück einer Langlaufloipe verläuft von oben betrachtet geradlinig und hat im Querschnitt das abgebildete Profil, welches annähernd durch den Graphen der Funktion $f: x \mapsto 8 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 18x + 100 \right)$ mit der Definitionsmenge $D_f = [0;7{,}5]$ beschrieben werden kann.
Die x-Achse gibt die Länge in waagrechter Richtung an, auf der y-Achse ist die Höhe über dem Meeresspiegel aufgetragen. Die Koordinaten x und y stellen Längenangaben in der Einheit Kilometer bzw. Meter dar. (Abitur 2020 Teil 2 AII)



15.1 Ermitteln Sie die maximalen Teilintervalle von D_f, in denen die Loipe auf- bzw. abwärts verläuft.

15.2 Berechnen Sie unter Verwendung von Teilaufgabe 15.1, in welcher horizontalen Entfernung vom Beginn des Teilstückes der Loipe maximale Höhe erreicht wird. Geben Sie an, in welcher Höhe Sporttreibende sich am höchsten Punkt der Loipe befinden.

15.3 Ermitteln Sie, nach wie vielen Kilometern in horizontaler Entfernung vom Ausgangspunkt die Loipe am steilsten abwärts verläuft.

15.4 Bestimmen Sie die durchschnittliche Steigung der Loipe in Prozent auf den ersten drei Kilometern.

15.5 Die Steigung der Loipe bei Kilometer 2 tritt im weiteren Verlauf der Loipe noch einmal auf. Berechnen Sie die Stelle, an der dies der Fall ist.

Lösungen

1.1 Ansatz:

$p(x) \geq 0 \Rightarrow -4000x + 40000 \geq 0 \Rightarrow x \leq 10$

$\Rightarrow D_p = [0;10]$

1.2

$E(x) = x \cdot p(x) = x \cdot (-4000x + 40000) = -4000x^2 + 40000x$

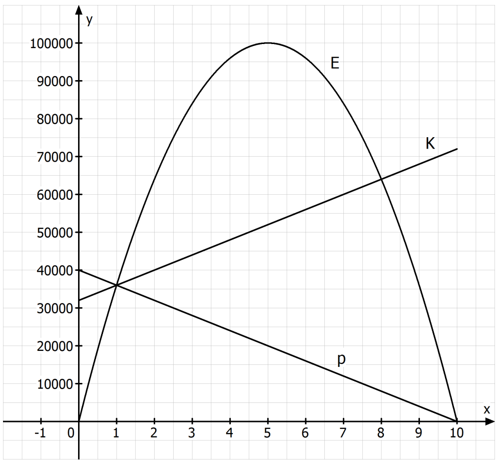
Maximaler Erlös:

Berechnung des Scheitels von E(x):

$$x_s = -\frac{40000}{-8000} = 5 \quad y_s = -4000 \cdot 5^2 + 40000 \cdot 5 = 100000$$

Bei 5 produzierten Teilen ist der Erlös maximal, nämlich 100000 GE.

1.3



1.4 Berechnung der Gewinnschwelle und der Gewinngrenze: E(x) = K(x)

$\Rightarrow -4000x^2 + 40000x = 4000x + 32000 \Rightarrow 4000x^2 - 36000x + 32000 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{36000 \pm \sqrt{784000000}}{8000} = \frac{36000 \pm 28000}{8000}$$

$x_1 = 1$ (Gewinnschwelle) $x_2 = 8$ (Gewinngrenze)

1.5

$G(x) = E(x) - K(x) \Rightarrow G(x) = -4000x^2 + 40000x - 4000x - 32000$

$\Rightarrow G(x) = -4000x^2 + 36000x - 32000$

Maximum ist der Scheitel, da G_G eine nach unten geöffnete Parabel ist

$$x_s = -\frac{36000}{-8000} = 4{,}5 \quad y_s = -4000 \cdot 4{,}5^2 + 36000 \cdot 4{,}5 - 32000 = 49000$$

Der maximale Gewinn von 49000 GE wird erzielt bei einer Menge von 4,5.

2.1

$$p(x) \geq 0 \Rightarrow -7x + 49 \geq 0 \Rightarrow x \leq 7$$

$$\Rightarrow D_p = \left[0;7\right]$$

2.2 $E(x) = x \cdot (-7x + 49) = -7x^2 + 49x$

2.3

$$K(x) = E(x) \quad \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 15x + 32 = -7x^2 + 49x$$

$$\Rightarrow x^3 + x^2 - 34x + 32 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \,(\text{durch Ausprobieren})$$

$$\text{Polynomdivision}: (x^3 + x^2 - 34x + 32) : (x - 1) = x^2 + 2x - 32$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 32 = 0 \quad x_{2/3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-32)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{132}}{2}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{-2 + \sqrt{132}}{2} \approx 4{,}74 \quad x_3 = \frac{-2 - \sqrt{132}}{2} \approx -6{,}74 \notin D$$

Gewinnschwelle: $x = 1$ Gewinngrenze: $x = 4{,}74$

3.1 $f(x) = 1400 + 0{,}075x$

3.2 $1400 + 0{,}075 \cdot 28000 = 3500€$

3.3 $1400 + 0{,}075x = 5000 \Rightarrow 0{,}075x = 3600 \Rightarrow x = 48000€$

4.1

$$y = m \cdot x + t$$

$$m = \frac{4800 - 4200}{10 - 15} = -120$$

$$4800 = -120 \cdot 10 + t \Rightarrow t = 6000$$

$$\Rightarrow y = -120 \cdot x + 6000$$

4.2 $-120x + 6000 = 0 \Rightarrow 120x = 6000 \Rightarrow x = 50\,\text{min}$

5

$$\frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2 = 1{,}62 \quad \Rightarrow \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 0{,}38 = 0$$

$\text{Substitution}: z = x^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}z^2 - z + 0{,}38 = 0 \quad \Rightarrow z_1 = 0{,}4 \quad z_2 = 7{,}6$$

Resubstitution:

1) $x^2 = 0{,}4 \quad \Rightarrow x_1 = -0{,}63 \quad x_2 = 0{,}63$

2) $x^2 = 7{,}6 \quad \Rightarrow x_3 = -2{,}76 \quad x_4 = 2{,}76$

$\Rightarrow x = -0{,}63$

$WP_1(-1{,}5/0{,}4) \quad WP_2(1{,}5/0{,}4) \quad HOP(0/2)$

6.1

$$\frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 12x = 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{2}x(x^2 - 10x + 24) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0$$

$x^2 - 10x + 24 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = 4 \quad x_3 = 6$

Die Breite des Lärmschutzwalls beträgt vier Meter und des Abflusskanals zwei Meter.

6.2

$$\frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 12x = 7{,}5 \quad \Rightarrow \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 12x - 7{,}5 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 12x - 7{,}5\right) : (x-1) = 0{,}5x^2 - 4{,}5x + 7{,}5$$

$0{,}5x^2 - 4{,}5x + 7{,}5 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = 6{,}79 \quad x_3 = 2{,}21$

Die Länge des Kabelschachtes beträgt 2,21 - 1 = 1,21 Meter.

7.1

Länge der Grundkante: a

$V_{Aquarium} = a \cdot a \cdot 1{,}5a = 1{,}5a^3$

$V(10) = 1{,}5 \cdot 10^3 = 1500\ dm^3$

7.2

Länge der Grundkante: a

$A_{Aquarium} = a \cdot a + 4 \cdot a \cdot 1{,}5a = 7a^2$

$A(10) = 7 \cdot 10^2 = 700\ dm^2$

7.3

Materialpreis: $7a^2 \cdot 3 = 21a^2$

Kosten Spezialsalz: $1{,}5a^3 \cdot 1 = 1{,}5a^3$

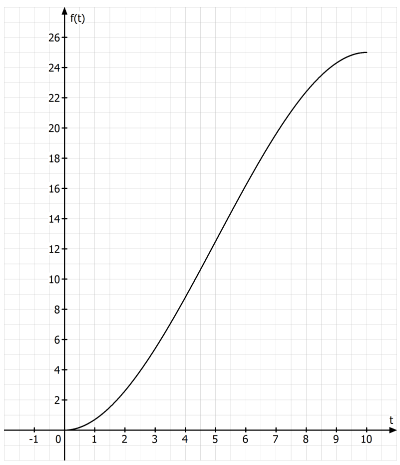
$1{,}5a^3 = 21a^2 \quad \Rightarrow 1{,}5a^3 - 21a^2 = 0 \quad \Rightarrow 1{,}5a^2(a-14) = 0$

$\Rightarrow a_1 = 0 \quad a_2 = 14$

Skizze von $(1{,}5a^3 - 21a^2)$:

$\Rightarrow$ Für a > 14 übersteigen die Kosten für den Inhalt die Materialkosten.

8.1



8.2 Das Auto legt in den ersten zehn Minuten immer mehr Weg zurück.

8.3

$f(7) = -0{,}05(7)^3 + 0{,}75(7)^2 = 19{,}6$

Nach sieben Minuten hat das Auto eine Strecke von 19,6 km zurückgelegt.

8.4 Das Auto hat nach fünf Minuten 12,5 km zurückgelegt.

8.5 Der Graph von f ist zunächst linksgekrümmt, d.h. das Auto legt mehr Strecke pro Minute zurück (fährt immer schneller) und ist ab etwa fünf Minuten rechtsgekrümmt, d.h. das Auto legt weniger Strecke pro Minute zurück (fährt immer langsamer).

8.6 Nach zehn Minuten legt das Auto gar keine Strecke mehr zurück, d.h es steht.

8.7 Nach zehn Minuten würde der Graph fallen, d.h. das Auto würde „weniger Strecke“ zurücklegen, was sinnlos ist.

9.1

$f(x)=a(x+4)^2(x-4)^2$

$P(0/4)$ einsetzen:

$a\cdot 16\cdot 16=4 \quad \Rightarrow a=\frac{1}{64}$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{64}x^4-\frac{1}{2}x^2+4$

9.2

$\frac{1}{64}x^4-\frac{1}{2}x^2+4=3 \quad \Rightarrow \frac{1}{64}x^4-\frac{1}{2}x^2+1=0 \quad \Rightarrow x^4-32x^2+64=0$

Substitution: $z=x^2$

$\Rightarrow z^2-32z+64=0 \quad \Rightarrow z_1=16+8\sqrt{3} \quad z_2=16-8\sqrt{3}$

Resubstitution:

1) $x^2=16+8\sqrt{3} \quad \Rightarrow x_1=-5,46 \quad x_2=5,46$

2) $x^2=16-8\sqrt{3} \quad \Rightarrow x_3=-1,46 \quad x_4=1,46$

Die maximal mögliche Breite des Fensters beträgt $2\cdot 1,46=2,92$ Meter.

10.1

Anruf nach neun Tagen $\Rightarrow f(19)=-1,2\cdot(19)^3+25,2\cdot(19)^2=866,4$

Am Termin der Faschingsparty gibt es etwa 866 Neuerkrankungen.

10.2

$-1,2x^3+25,2x^2=0 \quad \Rightarrow x^2(-1,2x+25,2)=0 \quad \Rightarrow x_1=0 \quad x_2=21$

Nach 21 Tagen ist die Grippewelle abgeklungen.

10.3 Die Zahl der Neuerkrankungen erreicht am 14. Tag seinen Höchststand.
Am 7. Tag steigt die Zahl der Neuerkrankungen am stärksten an.

10.4 Die SMV sollte mit der Ausrichtung ihrer Faschingsparty noch 2 Tage warten.

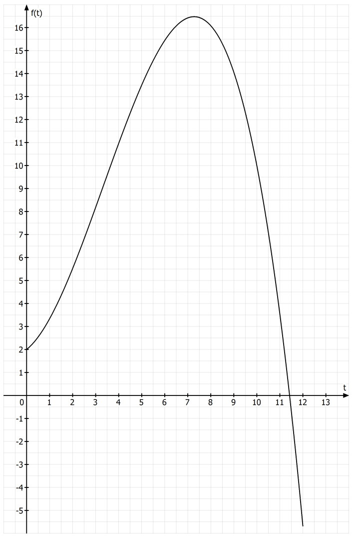
11.1

$P=c\cdot A\cdot(2v)^3=c\cdot A\cdot 8v^3$

Die Leistung verachtfacht sich.

11.2 $P=c\cdot A\cdot v^3 \quad \Rightarrow v^3=\frac{P}{c\cdot A} \quad \Rightarrow v=\sqrt[3]{\frac{P}{c\cdot A}}$

12.1



12.2

Beobachtungsbeginn: $f(0)=2$

$\Rightarrow -0{,}06t^3+0{,}6t^2+0{,}8t+2=2 \quad \Rightarrow -0{,}06t^3+0{,}6t^2+0{,}8t=0$

$\Rightarrow t(-0{,}06t^2+0{,}6t+0{,}8)=0 \quad \Rightarrow t_1=0$

$-0{,}06t^2+0{,}6t+0{,}8=0 \quad \Rightarrow t_2=-1{,}17 \quad t_3=11{,}17$

Nach etwa 11,17 Stunden ist die bedeckte Fläche genauso groß wie zu Beobachtungsbeginn.

12.3 Nach Zeichnung ist die Bakterienkultur etwa nach 11,5 Stunden ausgestorben.

12.4

Die Bakterienkultur wächst etwa bis 7,2 Stunden, danach nicht mehr.

$f(7{,}2)=-0{,}06\cdot(7{,}2)^3+0{,}6\cdot(7{,}2)^2+0{,}8\cdot 7{,}2+2=16{,}47\ \text{cm}^2$

12.5 Die Bakterien vermehren sich nach Zeichnung nach etwa 3,3 Stunden am schnellsten.

13.1

$D_K=D_{E_p}=\left[0;150\right]$

Das Unternehmen kann höchstens 150 Stück herstellen und

Einstellung der Produktion werden 0 Stück hergestellt.

13.2

$K(50)=0{,}0004\cdot 50^3-0{,}06\cdot 50^2+3\cdot 50+100=150$

$\Rightarrow 150=p\cdot 50 \quad \Rightarrow p=3$

$\Rightarrow E_3(x)=3\cdot x$

13.3

$$G(x) = 3x - \left(0{,}0004x^3 - 0{,}06x^2 + 3x + 100\right) = -0{,}0004x^3 + 0{,}06x^2 - 100$$

$$-0{,}0004x^3 + 0{,}06x^2 - 100 = 0 \qquad x_1 = 50 \text{ (siehe 13.2)}$$

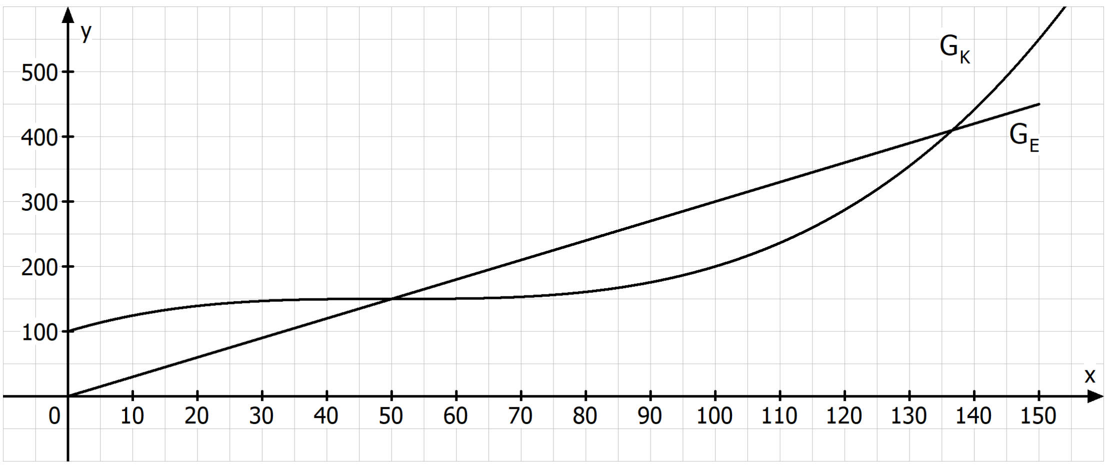
$$\left(-0{,}0004x^3 + 0{,}06x^2 - 100\right) : (x - 50) = -0{,}0004x^2 + 0{,}04x + 2$$

$$-0{,}0004x^2 + 0{,}04x + 2 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = 50 + 50\sqrt{3} \approx 136 \qquad x_3 = 50 - 50\sqrt{3} \approx -37 \notin D_G$$

Skizze von G:

Eine gewinnerzielende Produktion ist nur im Intervall $\left[51;136\right]$ möglich.

13.4



13.5 Der Gewinn ist am größten, wenn die Differenz von Erlös und Kosten am größten ist. Dies ist bei einer Stückzahl von 100 der Fall.

13.6 Stückkosten bei maximaler Verkaufsmenge: $\dfrac{K(100)}{100} = \dfrac{200}{100} = 2\ €$

14.1

$$g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$\text{Achsensymmetrie}: b = d = 0 \quad \Rightarrow g(x) = ax^4 + cx^2 + e$$

$$\text{(I)} \;\; g(0) = 0 \qquad \Rightarrow e = 0$$

$$\text{(II)} \;\; g(2) = 0 \qquad \Rightarrow 16a + 4c = 0$$

$$\text{(III)} \; g(1) = 0{,}25 \;\; \Rightarrow a + c = 0{,}25$$

$$\text{(III)} \Rightarrow a = 0{,}25 - c$$

$$\text{(II)} \Rightarrow 16\left(0{,}25 - c\right) + 4c = 0 \quad \Rightarrow -12c + 4 = 0 \quad \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow a = 0{,}25 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^2$$

14.2.1 $0{,}25 = -a \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 0{,}75 \quad \Rightarrow 0{,}25 = -a + 5{,}75 \quad \Rightarrow a = 5{,}5$

14.2.2

$$g'(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x$$

$$-\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x = 0 \quad \Rightarrow x \cdot \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3} = 0 \quad \Rightarrow x^2 = 2 \quad \Rightarrow x_2 = -\sqrt{2} \quad x_3 = \sqrt{2}$$

Skizze von g' :

$$\Rightarrow x = \sqrt{2} \;\; \text{HOP} \qquad \text{HOP}\left(\sqrt{2} \,|\, \frac{1}{3}\right)$$

Da g im positiven Bereich nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

$\Rightarrow$ absolutes Maximum für $x = \sqrt{2}$

Die Auffangwanne kann bis zu einer Höhe von $\frac{1}{3}$ m befüllt werden, bevor sie überläuft.

15.1

$f'(x) = 8 \cdot \left(x^2 - 9x + 18\right)$

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \ \Rightarrow x_1 = 6 \quad x_2 = 3$

Skizze von f':

$\Rightarrow$ Loipe geht bergauf für $x \in \left[0;3\right]$ sowie für $x \in \left[6;7,5\right]$

Loipe geht bergab für $x \in \left[3;6\right]$

15.2

Relatives Maximum für $x = 3 \ \Rightarrow HOP\left(3|980\right)$

Randmaximum für $x = 7,5 \Rightarrow RM\left(7,5|980\right)$

Die maximale Höhe von 980 m wird sowohl nach 3 km als auch nach 7,5 km erreicht.

15.3

$f''(x) = 8\left(2x - 9\right)$

$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow 2x - 9 = 0 \ \Rightarrow x = 4,5$

Skizze von f'':

$\Rightarrow x = 4$ WEP (Minimum von f') $\qquad f'(4) = -0,25 < 0$

$\Rightarrow$ nach 4 km verläuft die Loipe am steilsten abwärts;

15.4 $m = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{980 - 800}{3} = 60\,\dfrac{m}{km} \quad \Rightarrow \dfrac{60}{1000} = 6\,\%$

15.5

$f'(x) = 8\left(x^2 - 9x + 18\right) \qquad f'(2) = 32$

$8\left(x^2 - 9x + 18\right) = 32 \quad \Rightarrow 8x^2 - 72x + 112 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 7 \quad x_2 = 2$

Bei Kilometer 7 tritt nochmal die gleiche Steigung wie bei Kilometer 2 auf.